GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

REQUISITOS PARA PRESENTACIÓN DE EXÁMENES EXTRAORDINARIOS

1. Es **OBLIGATORIO** entregar el portafolio de evidencias con **todas** las actividades desarrolladas en forma clara y ordenada, cada sección deberá contar con el desarrollo de los procedimientos necesarios para obtener la solución.

2. Identificación vigente con fotografía (credencial de la escuela o INE).

3. Asistir uniformado en caso de ser alumno inscrito o baja temporal, exalumnos pueden presentarse con ropa.

4. Puntualidad, no hay tolerancia de tiempo.

5. No se realizarán dos exámenes el mismo día a la misma hora (elegir los exámenes de las asignaturas que no se empalmen con otras).

6. En caso de haber materias empalmadas deberán solicitar por escrito autorización para presentar los exámenes a los líderes de campo correspondientes.

Objetivo de la guía:
Proporcionar al estudiante una guía de estudio y una serie de actividades que corresponden al programa de estudios de la materia con la finalidad de que integre su portafolio de evidencias.
El alumno debe realizar todas las actividades y ejercicios que se proponen en cada una de sus secciones, para que analice, reflexione y desarrolle los conocimientos necesarios para presentar el examen extraordinario correspondiente a la materia.
Al resolver las actividades, el alumno pone en práctica sus habilidades aritméticas y algebraicas, interpreta soluciones y construir representaciones gráficas.

FORMATO DE ENTREGA:

- Entregar el portafolio en un folder o engargolado.
- Primera hoja con sus datos.
- Ejercicios de la guía.
- El portafolio se entrega a más tardar el día del examen a la hora de inicio.

Centro de Estudios de Bachillerato 4/1

Mtro. Moisés Sáenz Garza

Campo diciplinar de Matemáticas

Guía de examen extraordinario

Cálculo diferencial

Ciclo Escolar 2023-2024 A

Periodo:Octubre

Profesor:

Miguel A. Marquina Carmona

1. Límites

El concepto de límite de una función en el punto x_0 se refiere al valor L al que tiende la función a medida que es evaluada en un valor x cada vez más cercano a x_0, esto se representa como,

$$\lim_{x->x_0} f(x) = L$$

1.1. Límtes de funciones continuas en un punto

En general si el valor x_0 en el que queremos conocer el límite de la función pertenece al dominio de la función, bastará con evaluar la función en $x = x_0$. En este caso el límite de la función en $x = x_0$ corresponde a la función evaluada en $x = x_0$, esto es,

$$\lim_{x->x_0} f(x) = f(x_0)$$

Por ejemplo calculemos el siguiente límite

$$\lim_{x->5} \frac{x^2-1}{2x+3} = \lim_{x->5} \frac{5^2-1}{2*5+3} = \frac{24}{13}.$$

Cálcula los siguientes límites

1. $$\lim_{x->5} \frac{x^2-1}{2x-3}$$

2. $$\lim_{x->0} \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

3. $$\lim_{x->0} \frac{3x^3+2x^2+20x-10}{x^4+3x^3+3x^2+x-5}$$

4. $$\lim_{x->1/2} \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2+1}$$

5. $$\lim_{x->-4} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$$

6.
$$\lim_{x->1/2} \frac{1}{x+1} + 3$$

7.
$$\lim_{x->-4} \frac{1}{(x+4)^2}$$

8.
$$\lim_{x->4} \frac{x-4}{(x+4)^2}$$

9.
$$\lim_{x->4} \frac{x-4}{(x+4)^2}$$

10.
$$\lim_{x->0} \frac{1-e^x}{1+e^x}$$

1.2. Límites indeterminados

En ocaciones la función no está definida en cierto valor x_0, y por tanto no puede ser evaluada en ese valor particular. Sin embargo aún podemos conocer como se comporta el valor de la función para valores de x cercanos al valor x_0. En estos casos para conocer el valor del límte de la función en dicho punto será necesario eliminar la indeterminación en x_0, esto se logra mediante la factorización. Consideremos el siguiente ejemplo

$$\lim_{x->-2} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}, \tag{1}$$

si evaluamos directamente el límite llegamos a una indeterminación, observemos

$$\lim_{x->-2} \frac{(-2)^2-4}{(-2)^2+3(-2)+2} = \frac{4-4}{4-6+2} = \frac{0}{0}, \tag{2}$$

por tanto es necesario factorizar para eliminar la inderminación.

$$\lim_{x->-2} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2} = \lim_{x->-2} \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+2)}} = \lim_{x->-2} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \lim_{x->-2} \frac{(-2-2)}{(-2+1)} = 4 \tag{3}$$

Resuelve los siguientes límites indeterminados

1.
$$\lim_{x->1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

2.
$$\lim_{x->-1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

3.
$$\lim_{x->1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

4.
$$\lim_{x->-1} \frac{x+1}{x-1}$$

5.
$$\lim_{x->2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

6.
$$\lim_{x->-5} \frac{x^2-25}{x+5}$$

7.
$$\lim_{x->-5} \frac{x+5}{x^2-5}$$

8.
$$\lim_{x->-5/3} \frac{9x^2-25}{3x+5}$$

9.
$$\lim_{x->9/4} \frac{4x-9}{16x^2-81}$$

10.
$$\lim_{x->\sqrt{6}} \frac{x-\sqrt{6}}{x^2-6}$$

11.
$$\lim_{x->10} \frac{x^2-20x+100}{x-10}$$

12.
$$\lim_{x->10} \frac{x^2-20x+100}{x^2-100}$$

13.
$$\lim_{x->-10} \frac{x^2-100}{3x^2+35x+50}$$

14.
$$\lim_{x->7/3} \frac{6x^2+x-35}{9x^2-49}$$

15.
$$\lim_{x->3/5} \frac{10x^2-21x+9}{15x^2+16x-15}$$

1.3. Límites en infiníto

En ciertas situaciones es necesario estudiar el compartamiento de una función cuando su variable independiente tiende a infiníto, en estos casos es de utilidad realizar el cálculo del límite de la función en infinito.

$$\lim_{x->\infty} f(x) = L$$

Para realizar el cálculo de un límite en infinito considerense los iguientes ejemplos

1.
$$\lim_{x->\infty} x^4 - x^3 + 4x + 10 = (\infty)^4 = \infty \tag{4}$$

   El límite es infinito debido a que predomina el término con la potencia más alta.

2.
$$\begin{aligned}\lim_{x->\infty} \frac{x-1}{x+1} &= \lim_{x->\infty} \frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x->\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x->\infty} \frac{1-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}\\ &= \lim_{x->\infty} \frac{1-0}{1+0}\\ &= 1\end{aligned}$$

   Nótese que para calcular el límite fue necesario dividir cada término por x. En general cuando se tienen límites de funciones racionales a infinito se debe dividir cada término del cociente por la variable con la pontencia más alta, considere un ejemplo más.

3.

$$\lim_{x->\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}=\lim_{x->\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x->\infty}\frac{1-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x->\infty}\frac{1-0}{0+0}=\infty \tag{5}$$

Resuelva los siguientes límites a infinito

1.

$$\lim_{x->\infty}\frac{x}{x-1} \tag{6}$$

2.

$$\lim_{x->\infty}\frac{x}{x^2-1} \tag{7}$$

3.

$$\lim_{x->\infty}\frac{5x^3-6x^2+4x+8}{2x^4-6x+7} \tag{8}$$

4.

$$\lim_{x->\infty}\frac{5x^5-6x^2+4x+8}{2x^4-6x+7} \tag{9}$$

5.

$$\lim_{x->\infty}\frac{-5x^5-6x^2+4x+8}{5x^4-6x+7} \tag{10}$$

2. Derivadas por definición

La definición de derivada de una función $f(x)$ evaluada en el valor x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese valor x_0. El cálculo de la pendiente de la recta tangente conociendo un solo punto sobre la gráfica de la función se realiza a través de un proceso límite. Se comienza tomando dos puntos arbitrarios sobre la gráfica de la función, cálculando la pendiente de esta recta secante que une los puntos, y aproximando infinitamente los puntos, de tal manera que la pendiente de la recta secante se vuelva la pendiente de la recta tangente cuando los puntos está infinitamente cerca de tal forma que parecen un solo punto. Si la derivada de la función en el punto x_0 se denota por $f'(x_0)$, entonces la derivada se cálcula como sigue,

$$f'(x_0)=\lim_{x->x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{11}$$

En el caso límite el punto x y x_0 estarán infinitamente cerca, por lo tanto podemos decir que $x = x_0+h$, donde h es un valor infinitamente pequeño, podemos escribir entonces

$$f'(x_0) = \lim_{h->0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{12}$$

Como esta definición es valida para un x_0 arbitrario es común llamar simplemente x al valor x_0, tenemos entonces la definición usual de derivada

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h->0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \tag{13}$$

Ralizamos tres ejemplos para mostrar como se realiza el cálculo de la derivada de una fución utilizando su definición.

1. $f(x) = x$, la derivada está dada por

$$f'(x) = \lim_{h->0} \frac{(x+h)-(x)}{h} = \lim_{h->0} \frac{h}{h} = 1 \tag{14}$$

   Escribimos entonces

$$f'(x) = 1$$

   Hemos obtenido que la derivada de x es uno

2. $f(x) = 3x$, la derivada está dada por

$$f'(x) = \lim_{h->0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h->0} \frac{3(x+h)-3(x)}{h} = \lim_{h->0} \frac{3x+3h-3x}{h} = \lim_{h->0} \frac{3h}{h} = 3 \tag{15}$$

   Se concluye que la derivda de la función $f(x) = 3x$ es simplemente 3. Es decir

$$f'(x) = 3$$

3. $f(x) = x^2$, la derivada está dada por

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h->0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h->0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h->0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h->0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h->0} \frac{(2x+h)h}{h} \\
&= \lim_{h->0} \frac{(2x+h)\cancel{h}}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h->0} (2x+h) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

Realiza el cálculo de la derivada de las siguientes funciones utilizando la definición de derivada.

1. *a*) $f(x) = 5$ *b*) $f(x) = 5x$ *c*) $f(x) = 5x + 3$
2. *a*) $f(x) = 5x^2$ *b*) $f(x) = 5x^2 + 3x$ *c*) $f(x) = 5x^2 + 3x + 4$
3. *a*) $f(x) = 5x^3$ *b*) $f(x) = 5x^3 + 3x^2$ *c*) $f(x) = 5x^2 + 3x^2 + 4x + 6$

Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, y de ser necesario calculando otras derivadas, completa la siguiente tabla.

Funcion f(x)	Derivada $f'(x)$
5	
$5x^2$	
	5
	$2x$
$3x^2$	

3. Derivadas de funciones utilizando fórmulas

3.1. Derivada de funciones de la forma $f(x) = x^n$

Como habrás notado de los ejercicios de la sección anterior, exíste un patron que siguen las derivadas, cuando la función es de la forma,

$$f(x) = x^n, \tag{16}$$

en estos casos la derivada viene dada por la fórmula,

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

El exponente n puede tomar cualquier valor. Puede ser positivo, negativo, entero o fracción. Si el valor de $n = 0$ se tendría $f(x) = x^0 = 1$, y la derivada sería cero. A partir de ahora podrás calcular derivadas utilizando la fórmula (16), Consideremos los siguientes ejemplos,

1. sea $f(x) = x^3$, entonces la derivada está dada por,

$$f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2 \tag{17}$$

2. sea $f(x) = x^4$, entonces la derivada está dada por,

$$f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3 \tag{18}$$

3. sea $f(x) = x^{-3}$, entonces la derivada está dada por,

$$f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4} \tag{19}$$

4. sea $f(x) = x^{1/2}$, entonces la derivada está dada por,

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2 * \sqrt{x}} \tag{20}$$

5. sea $f(x) = 5x^3$, entonces la derivada está dada por,

$$f'(x) = 5 * 3x^{3-1} = 15x^2 \tag{21}$$

Cálcula la derivada de las siguientes funciones

1) $f(x) = 8$
2) $f(x) = -12x$
3) $f(x) = x^7$
4) $f(x) = 4x^6$
5) $f(x) = 8x^{-7}$
6) $f(x) = x^{3/4}$
7) $f(x) = 7x^{2/3}$
8) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
9) $f(x) = \dfrac{1}{3x^{1/4}}$
10) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

3.2. Derivadas de suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones

El caso de encontrar la derivada de las funciones que resultan de realizar operaciones entre funciones simples, es decir de sumar, restar, multiplicar, dividir, y componer, se explicará en seguida.

3.2.1. Suma y resta de funciones

Cuando se tiene una función, digamos $f(x)$ que resulta ser la suma o resta de dos funciones $h(x)$ y $g(x)$, es decir,

$$f(x) = h(x) \pm g(x),$$

la derivada de esta función es solo la suma (o resta) de las derivadas. Consideremos para esta sección a las funciones,

$$h(x) = 3x^2 - 10 \tag{22}$$
$$g(x) = 10x + 6. \tag{23}$$

La suma y resta de las funciones $h(x)$ y $g(x)$ son,

$$f(x) = h(x) + g(x) = (3x^2 - 10) + (10x + 6) = 3x^2 + 10x - 4, \tag{24}$$
$$f(x) = h(x) - g(x) = (3x^2 - 10) - (10x + 6) = 3x^2 - 10x - 16. \tag{25}$$

Para caluclar la derivada de la suma o la resta se debe derivar cada uno de los términos que aparezcan. Para la derivada de la función (24), se tiene

$$f(x) = 3x^2 + 10x - 4,$$

y su derivada esá dada por

$$f'(x) = 6x + 10.$$

De forma similar, para la función (25)

$$f(x) = 3x^2 - 10x - 16$$

la derivada está dada por

$$f'(x) = 6x - 10$$

3.2.2. Derivada de una multiplicación

Consideremos ahora el caso de la función que resulta de multiplicar las funciones $h(x)$ y $g(x)$, esto es,

$$f(x) = h(x) \times g(x) = (3x^2 - 10)(10x + 6).$$

Para realizar la derivada de un producto de funciones utilizamos la siguiente fórmula

$$f'(x) = h'(x) * g(x) + h(x) * g'(x). \tag{26}$$

Para mostrar como se utiliza la fórmula (26), considermos el siguiente ejemplo,

$$f(x) = (3x^2 - 10)(10x + 6),$$

Su derivada se cálcula como sigue,

$$f'(x) = (6x)(10x + 6) + (3x^2 - 10)(10).$$

Ya que se ha calculado la derivada podemos simplificar el resultado

$$\begin{aligned} f'(x) &= 60x^2 + 36x + 30x^2 - 100 \\ &= 90x^2 + 36x - 100 \end{aligned}$$

3.2.3. Derivada de una división de funciones

Para derivar a una función que corresponde a una división de funciones, es decir,

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)},$$

se utiliza la siguiente fórmula

$$f'(x) = \frac{h'(x) * g(x) - h(x) * g'(x)}{g(x)^2}.$$

Considermos las funciones (22) y (23) para demostrar como derivar la división de dos funciones,

$$f(x = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 - 10}{10x + 6},$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x)(10x+6) - (3x^2 - 10)(10)}{(10x+6)^2} \\ &= \frac{(60x^2 + 36x) - (30x^2 - 100)}{(10x+6)^2} \\ &= \frac{60x^2 + 36x - 30x^2 + 100}{(10x+6)^2} \\ &= \frac{30x^2 + 36x + 100}{(10x+6)^2} \end{aligned}$$

3.2.4. Composición de funciones (regla de la cadena)

Ahora abordamos el caso de derivar una función compuesta, es decir que se obtiene de componer dos funciones. La composición no es commutativa, en general

$$f(x) \circ g(x) = f(g(x)),$$

es diferente que

$$g(x) \circ f(x) = g(f(x)).$$

Realicemos la composición de las siguientes funciones,

$$h(x) = 3x^2 - 10$$

y

$$g(x) = 10x + 6$$

.

$$f(x) = h(x) \circ g(x) = h(g(x)) = 3g^2 - 10 = 3(10x+6)^2 - 10 \tag{27}$$

Para derivar la función $f(x) = h(g(x)) = 3(10x+6)^2 - 10$, se utiliza la siguiente fórmula

$$f'(x) = \frac{df}{dg} * \frac{dg}{dx}. \tag{28}$$

Mostremos como se ocupa esta fórmula

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{dg} * \frac{dg}{dx} \\ &= (6g)(10) \\ &= 6(3x^2 - 10)(10) \\ &= 180x^2 - 600. \end{aligned}$$

Estudiemos algunos ejemplos más para continuar ilustrando como se utiliza la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

1. $f(x) = (2x^8 + 3)^5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(2x^8+3)^4 * (16x^7) \\ &= 80x^7(2x^8+3)^4 \end{aligned}$$

2. $f(x) = 20(45x^3 - 20x + 5)^4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 20 * 4(45x^3 - 20x + 5)^3 * (135x^2 - 20) \\ &= 80(45x^3 - 20x + 5)^3 * (135x^2 - 20) \\ &= 80(45x^3 - 20x + 5)^3 * 5(27x^2 - 4) \\ &= 400(45x^3 - 20x + 5)^3 * (27x^2 - 4) \\ &= 400 * 5(9x^3 - 4x + 1)^3 * (27x^2 - 4) \\ &= 2000(9x^3 - 4x + 1)^3 * (27x^2 - 4) \end{aligned}$$

3. $f(x) = (100x^2 + 11x + 5)^2$

$$f'(x) = 2(100x^2 + 11x + 5) * (200x + 11)$$

Finalmente mostramos un ejemplo donde se integran todos los conceptos anteriores.

Sea

$$f(x) = \frac{(3x^5 + 2x + 9)^4}{(2x - 3)^3}.$$

Para obtener la derivada primeramente aplicamos la regla para dividir un cociente

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4(3x^5 + 2x + 9)^{4-1} * (15x^4 + 2) \times (2x - 3)^3 - (3x^5 + 2x + 9)^4 \times 3(2x - 3)^2(2)}{(2x - 3)^6} \\
&= \frac{4(3x^5 + 2x + 9)^3(15x^4 + 2) \times (2x - 3)^3 - 6(3x^5 + 2x + 9)^4 \times (2x - 3)^2}{(2x - 3)^6} \\
&= \frac{(3x^5 + 2x + 9)^3(2x - 3)^2[4(2x - 3)(15x^4 + 2) - 6(3x^5 + 2x + 9)]}{(2x - 3)^6} \\
&= \frac{(3x^5 + 2x + 9)^3(2x - 3)^2[4(30x^5 - 45x^4 + 4x - 6) - 6(3x^5 + 2x + 9)]}{(2x - 3)^6} \\
&= \frac{(3x^5 + 2x + 9)^3(2x - 3)^2[120x^5 - 180x^4 + 16x - 2418x^5 - 12x - 54]}{(2x - 3)^6} \\
&= \frac{(3x^5 + 2x + 9)^3(2x - 3)^2[102x^5 - 180x^4 + 4x - 78]}{(2x - 3)^6} \\
&= \frac{(3x^5 + 2x + 9)^3[102x^5 - 180x^4 + 4x - 78]}{(2x - 3)^4} \\
&= \frac{2(3x^5 + 2x + 9)^3[51x^5 - 90x^4 + 2x - 39]}{(2x - 3)^4}
\end{aligned}$$

Para las siguientes funciones cálcula su derivada

1. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 9$
2. $f(x) = (4x^3 - 5)^3$
3. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$
4. $f(x) = (2x + 5)^3(x - 1)$

5. $(x-1)^3(x+1)^4$

6. $\frac{x-1}{2x+1}$

7. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x-1}$

Investigas las tablas de fórmulas para derivadas de funciones trasendentales, y realiza las siguientes derivadas

1. $f(x) = \sin(2x)$

2. $f(x) = \cos(x^3)$

3. $f(x) = \sin(2x)\cos(x^3)$

4. $f(x) = e^{2x}\sin(3x)$

5. $f(x) = \ln^3 x^2 + x\ln x$

Referencias

[Anónimo] Anónimo, A. Cálculo diferencial. https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus.

[2] Ayres, Frank. Mendelson, E. (2010). *Cálculo*. Mc Graw Hill, 5ed edition.

[3] Editorial, U. (2023). *Cálculo Diferencial*. Grupo Editorial Uribe-GC, 5ed edition.